Cálculo I

Integração



Determinação de primitivas

Definição: Uma função F é uma ***primitiva*** ou uma ***antiderivada*** de f em um intervalo I se F'(x) = f(x) para qualquer x em I.



Exemplo 1

Determine uma primitiva para cada uma das seguintes funções:

$$a)\, f(x) = 2x$$

$$b)\, g(x) = \cos x$$

$$c)\, h(x) = \frac{1}{x} + 2e^{2x}$$

- A função $F(x) = x^2$ não é a única função cuja derivada é 2x. Para qualquer constante C arbitrária, $x^2 + C$ também é.

INSTITUTO FEDERAL
BRASÍLIA
Campus Gama

Teorema

Se F é uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é F(x) + C, onde C é uma constante arbitrária.



Exemplo 2

- Determine uma primitiva de $f(x) = 3x^2$ que satisfaça $F(1) = -1$.



Exercícios

Determine a primitiva geral de cada uma das seguintes funções:

$a)\, f(x) = x^5$

$b)\, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$c)\, f(x) = sen 2x$

$d)\, f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$

$e)\, f(x) = e^{-3x}$

$f)\, f(x) = 2^x$



Definição

- O conjunto de todas as primitivas de f é chamado de ***integral indefinida*** de f em relação a x, denotado por

$$\int f(x)dx$$

$\int$ é o sinal da integral. A função f é o integrando da integral e x é a variável de integração.



Voltando ao exemplo 1

- Poderíamos escrever como:

$$a)\int 2x\,dx$$

$$b)\int \cos x\,dx$$

$$c)\int \left(\frac{1}{x} + 2e^{2x}\right) dx$$



Tabela Sumária de integrais indefinidas

$D_x(x) = 1$	$\int 1dx = \int dx = x + C$
$D_x\left(\dfrac{x^{r+1}}{r+1}\right) = x^r \; (r \neq -1)$	$\int x^r dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C (r \neq 1)$
$D_x(senx) = \cos x$	$\int \cos x dx = senx + C$
$D_x(-\cos x) = senx$	$\int senxdx = -\cos x + C$
$D_x(tgx) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 xdx = tgx + C$
$D_x(-\cot x) = \csc^2 x$	$\int \csc^2 xdx = -\cot x + C$
$D_x(\sec x) = \sec xtgx$	$\int \sec x \,.\, tgx \quad dx = \sec x + C$
$D_x(-\csc x) = \csc x \cot x$	$\int \csc x \,.\, \cot x \, dx = -\csc x + C$

Teorema

$$(i)\int \left[D_x f(x) \right] dx = f(x) + C$$

$$(ii) D_x \left[\int f(x) dx \right] = f(x)$$

$$(iii) \int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$(iv) \int \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(v) \int \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$



Exemplo 3

Calcule as integrais:

$$a)\int (5x^3 + 2\cos x)dx$$

$$b)\int \left(8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$$

$$c)\int \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} dx$$

$$d)\int \frac{1}{\cos u \cot u} du$$



Exemplo 4

- Resolva a equação diferencial

$$f'(x) = 6x^2 + x - 5$$

sujeita à condição inicial f(0) = 2.



Exemplo 5

- Resolva a equação diferencial

$$f''(x) = 5\cos x + 2senx$$

sujeita às condições iniciais f(0) = 3 e f'(0) = 4.



Exemplo 6

Um fabricante constata que o custo marginal (em reais) da produção de x unidades de uma componente de copiadora é dado por 30 – 0,02x,sabendo que o custo marginal é a taxa de variação da função custo. Se o custo da produção de uma unidade é R$ 35,00, determine a função custo e o custo da produção de 100 unidades.



Mudança de variáveis em integrais indefinidas

- **Método de substituição**

Se F é uma antiderivada de f, então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Se $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, então

$$\int f(u)du = F(u) + C$$



Exemplo 7

Calcular:

$$a)\int \sqrt{5x+7}\,dx$$

$$b)\int \cos 4x\,dx$$

$$c)\int x^2 e^{x^3}\,dx$$

$$d)\int \frac{2z}{\sqrt[3]{z^2+1}}\,dz$$

